گزینه دو

مؤسسه آموزشی فرهنگی

هندسه ۲

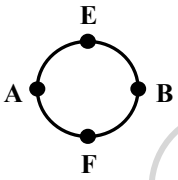
(فصل ۲)

دایره:

دایره، مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که فاصله آنها از نقطه‌ی ثابتی واقع در آن صفحه، مقدار ثابتی باشد. نقطه‌ی ثابت، مرکز دایره و مقدار ثابت شعاع دایره نامیده می‌شود.دایره به مرکز O و شعاع R را با $C(O,R)$ نشان می‌دهند.

بر دو نقطه‌ی متمایز بیشمار دایره می‌گذرد. مکان هندسی مرکز دایره‌ها، عمود منصف پاره خطی است که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند. بر سه نقطه‌ی غیر واقع بر یک خط راست یک دایره و فقط یک دایره می‌گذرد که مرکزش محل تلاقی عمود منصف دو به دوی پاره خطها می‌باشد.

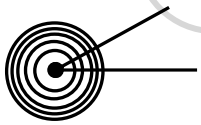
کمان:



دو نقطه‌ی A و B را بر روی دایره در نظر بگیرید. این دو نقطه محیط دایره را به دو قسمت کوچک و بزرگ تقسیم می‌کنند که هر کدام از آنها را یک کمان می‌نامند. (در حالتی که دو نقطه دو سر دو قطر باشند، دو قسمت برابرند.)

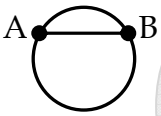
$$A\hat{E}B = A\hat{F}B$$

زاویه‌ی مرکزی:



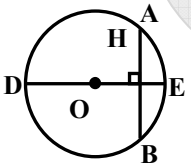
زاویه‌ای که رأس آن مرکز دایره و هر ضلع آن شعاع دایره باشد، زاویه‌ی مرکزی نامیده می‌شود. بنابه قرارداد، اندازه‌ی کمان نظیر هر زاویه‌ی مرکزی در دایره، همان اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی روبروی آن کمان در نظر گرفته می‌شود.

وتر:



پاره خطی است که دو نقطه‌ی متمایز از محیط یک دایره را بهم وصل می‌کند و وتری که از مرکز دایره بگذرد قطر نامیده می‌شود. که بزرگترین وتر هر دایره است.

نکات:



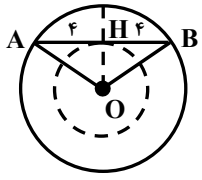
قضیه: در هر دایره قطر عمود بر هر وتر آن وتر و کمانهای نظیر آن وتر را نصف می‌کند و خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از آن دایره وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است.خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر از آن دایره وصل می‌کند بر آن وتر عمود است و بالعکس.

$$\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EB}$$
$$AH = HB$$

مثال: در دایره‌ی $C(O,۵)$ مکان هندسی وسط وترهایی به طول ۸، دایره‌ای به کدام شعاع است؟

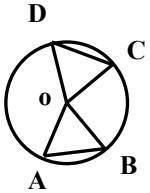
۱) ٤ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ٤) ۳

حل:



$$BH = \frac{AB}{۲} = ۴$$
$$OB^{۲} - BH^{۲} = OH^{۲} \Rightarrow OH = ۳ = R'$$

قضیه: در یک دایره، کمان‌های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند و بالعکس.



$$AB = CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

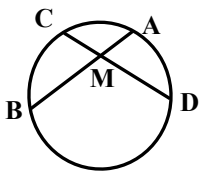
مؤسسه آموزشی فرهنگی

مثال: در شکل زیر دو وتر مساوی و متقاطع AB و CD در دایره مفروضند. در این صورت:

۱) $AD = BC$ ۲) $MD = MB$ ۳) $D\hat{B}C = A\hat{D}B$ ٤) همه‌ی موارد صحیح است.

حل:

داریم:



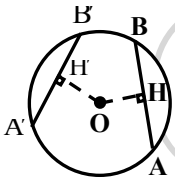
$$AB = CD \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

$$\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{DB} + \overset{\frown}{BC} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} \quad \text{(گزینه‌ی ۱)}$$

زوایای **ABC** و **ADC** هر دو رو به کمان **AC** می‌باشند لذا با هم برابرند. همینطور زوایای **ACD** و **BAC** با هم برابرند، لذا مثلثهای **ADM,MBC** با هم برابرند. پس:

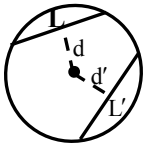
$$MD = MB \Rightarrow \left.\begin{matrix} A\hat{B}D = C\hat{D}B \\ A\hat{B}C = C\hat{D}A \end{matrix}\right\} \Rightarrow D\hat{B}C = A\hat{D}B \quad \textbf{(گزینهٔ ۳)} \quad \text{(گزینه‌ی ۲)}$$

قضیه: در هر دایره، وترهای مساوی، از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و بالعکس: $AB = A'B' \Leftrightarrow OH = OH'$



قضیه: در یک دایره، از دو وتر نابرابر، آن که بزرگتر است به مرکز دایره نزدیکتر است و بالعکس:

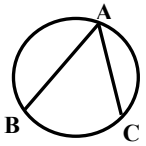
$$L > L' \Leftrightarrow d' > d$$



زاویه‌ی محاطی:

زاویه‌ای که رأسش روی دایره و ضلعهایش دو وتر از دایره باشند، زاویه‌ی محاطی نامیده می‌شود. کمانی از دایره را که به دو ضلع زاویه‌ی محاطی محدود و در داخل زاویه واقع است، کمان روبرو به آن زاویه می‌نامند.

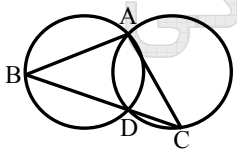
قضیه: اندازه‌ی هر زاویه‌ی محاطی برابر نصف کمان روبروی آن است: $B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$



مثال: دو دایره متساوی در نقاط A و D متقاطعند. از نقطه D قاطع BC را نسبت به دو دایره رسم می‌کنیم. مثلث ABC همواره:

۱) متساوی الساقین است. ۲) قائم الزاویه است.

۳) قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین است. ٤) متساوی الاضلاع است.



حل:

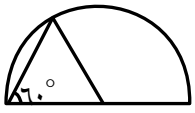
زوایای محاطی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ روبرو به دو کمان مساویند لذا مساویند.

مثال: مثلث متساوی‌الاضلاعی را داخل نیمدایره‌ای به شعاع R طوری محاط کرده‌ایم که یک ضلع مثلث روی قطر نیمدایره قرار گرفته است. کمترین محیط برای این مثلث بر حسب R کدام است؟

۱) $۲R$ ۲) $۳R$ ۳) $۲\sqrt{۲}R$ ٤) $۲\sqrt{۳}R$

حل:

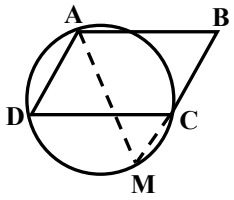
هرچه مثلث به سمت سر قطر حرکت می‌کند، ارتفاع آن کاهش می‌یابد. حداقل محیط مربوط به وقتی است که یک رأس مثلث سر قطر قرار گیرد که در این صورت سر دیگر روی مرکز دایره واقع می‌شود. لذا ضلع مثلث برابر شعاع دایره خواهد بود. لذا کمترین محیط **۳R** است.



مثال: در متوازی الاضلاع ABCD دایره‌ی محیطی مثلث ACD امتداد ضلع BC را در نقطه‌ی M قطع کرده است. مثلث ABMکدام نوع است؟

۱) متشابه ACD ۲) متساوی الساقین ۳) متساوی الاضلاع ٤) قائم الزاویه

حل:

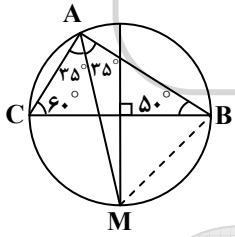


$$\left.\begin{matrix}\hat{M}=\hat{D}=\frac{AC}{2}\\ \hat{D}=\hat{B}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \hat{M}=\hat{B}$$ **پس مثلث متساوی الساقین است .**

مثال: در مثلث ABC، داریم $\hat{B}=50^\circ$ و $\hat{C}=60^\circ$. نیمساز داخلی زاویه‌ی A و عمود منصف ضلع BC در نقطه‌ی M متقاطع‌اند، زاویه‌ی MBC چند درجه است؟

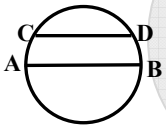
۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ٤) ٤۰

حل: گزینه ۳ پاسخ است.



دایره‌ی محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم. نیمساز زاویه‌ی A کمان BC را نصف می‌کند. عمود منصف ضلع BC هم کمان BC را نصف می‌کند، پس نقطه‌ی برخورد نیم‌ساز زاویه‌ی A و عمود منصف ضلع BC (نقطه‌ی M) روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC قرار دارد. بنابراین زاویه‌ی MBC برابر نصف کمان مقابلش است.

$$M\hat{B}C=\frac{\overset{\frown}{MC}}{2}=C\hat{A}M=35^\circ$$



قضیه: در هر دایره کمان‌های محصور بین دو وتر موازی با هم برابرند و بالعکس.

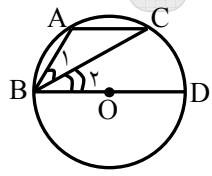
$$AB\parallel CD\Leftrightarrow BD=AC$$

مثال: در مثلث ABC می دانیم: $\hat{A}+\hat{C}=150^\circ$.اگر $AC\parallel BD$ باشد. در مورد این مثلث کدام گزینه صحیح است؟

۱) این مثلث متساوی الاضلاع می‌باشد. ۲) این مثلث قائم الزاویه است.

۳) این مثلث متساوی الساقین است. ٤) این مثلث مختلف الاضلاع است.

حل:

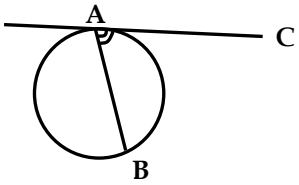


$$\left.\begin{matrix}\hat{C}=\hat{B}_2\Rightarrow \overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AB}\\ \hat{A}=\frac{\overset{\frown}{CDB}}{2}=\frac{\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BD}}{2}\\ \hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}=\frac{\overset{\frown}{CD}}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}\hat{A}-\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{BD}}{2}=90^\circ\\ \hat{A}+\hat{C}=150^\circ\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}\hat{A}=120^\circ\\ \hat{C}=30^\circ\end{matrix}\right\}\Rightarrow \hat{B}_1=30^\circ$$ مثلث متساوی‌الساقین است

زاویه‌ی ظلی:

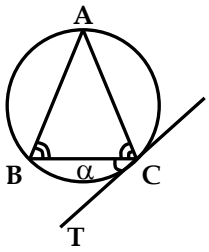
زاویه‌ای که رأسش روی دایره است و یک ضلعش دایره را قطع می‌کند و ضلع دیگرش بر دایره مماس است زاویه‌ی ظلی نامیده می‌شود.

قضیه: اندازه هر زاویه ظلی برابر با نصف کمان روبروی آن است.



$$B\hat{A}C=\frac{AB}{2}$$

مثال: در شکل روبرو $AB=AC$ و CT مماس بر دایره در نقطه C و $AC=۱۴۰^\circ$ می باشد. اندازه‌ی زاویه‌ی $B\hat{C}T$ کدام است؟



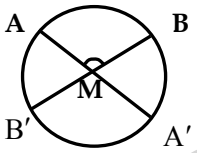
۱) ۸۰ ۲) ۶۰ ۳) ۴۰ ۴) ۲۰

حل:

$$AB=AC \Rightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}=۱۴۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC}=۸۰^\circ \Rightarrow B\hat{C}T=\frac{۸۰^\circ}{۲}=۴۰^\circ$$

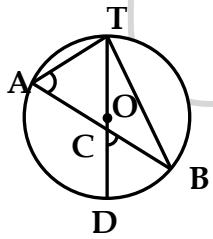
زاویه‌ی بین دو وتر:

زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در یک دایره ایجاد می‌شود برابر نصف مجموع اندازه‌ی دو کمانی است که به ضلعها و امتداد ضلع‌های آن زاویه محدودند.



$$A\hat{M}B=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{A'B'}}{۲}$$

مثال: در شکل مقابل O مرکز دایره و $\hat{A}=۶۵^\circ$ و $\hat{B}=۳۵^\circ$ زاویه C چند درجه است؟

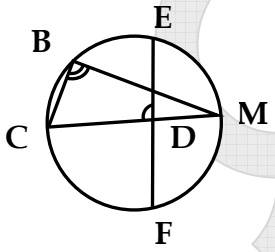


۱) ۶۰ ۲) ۶۱ ۳) ۶۲ ۴) ۶۳

حل:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{TB}}{۲}=۶۵^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{TB}=۱۳۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BD}=۱۸۰^\circ-۱۳۰^\circ=۵۰^\circ \\ \hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AT}}{۲}=۳۵^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AT}=۷۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AT}+\overset{\frown}{DB}}{۲}=\frac{۵۰^\circ+۷۰^\circ}{۲}=۶۰^\circ$$

مثال: در شکل زیر M وسط کمان EF است و $\overset{\frown}{BC}=۵۰^\circ$ اندازه‌ی $\hat{B}+\hat{D}$ چند درجه است؟



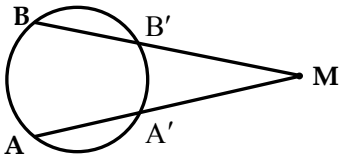
۱) ۱۶۰
۲) ۱۷۵
۳) ۱۸۰
۴) ۲۳۰

حل:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{CF}+\overset{\frown}{FM}}{۲} \\ \hat{D}=\frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{FM}}{۲} \\ \overset{\frown}{FM}=\overset{\frown}{EM}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}+\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{CF}+\overset{\frown}{FM}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{FM}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{CF}+\overset{\frown}{FM}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{EM}}{۲}=\frac{۳۶۰}{۲}=۱۸۰^\circ$$

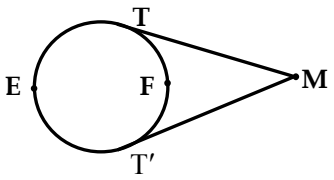
زاویه‌ی بین امتداد دو وتر:

امتداد وترهای AA' و BB' از دایره (C) در نقطه‌ی M یکدیگر را قطع کرده‌اند. اندازه‌ی زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر از یک دایره پدید می‌آید، برابر قدر مطلق نصف تفاضل اندازه‌ی کمانهایی از آن دایره است که به اضلاع آن زاویه محدود است:



$$A\hat{M}B=\frac{|AB-A'B'|}{۲}$$

در حالت خاص اگر دو وتر به دو مماس همرس تبدیل شود، داریم:

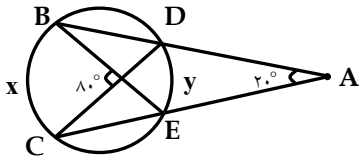


$$T\hat{M}T' = \frac{T\overset{\frown}{E}T' - T\overset{\frown}{F}T'}{۲}$$

مثال: در شکل مقابل اندازه‌ی کمان‌های x و y کدام است؟

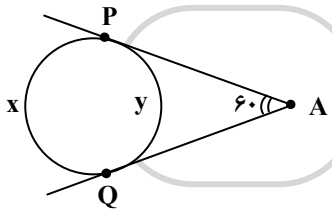
۱) ۱۰۰,۸۰ ۲) ۵۰,۱۰۰ ۳) ۶۰,۱۰۰ ۴) ۸۰,۷۰

حل:



$$\left.\begin{array}{l} ۸۰ = \frac{x+y}{۲} \Rightarrow x+y = ۱۶۰ \\ ۲۰ = \frac{x-y}{۲} \Rightarrow x-y = ۴۰ \end{array}\right\} \Rightarrow x = ۱۰۰^\circ \qquad y = ۶۰^\circ$$

مثال: در شکل روبرو $۲x-۳y$ کدام است؟



۱) ۸۰
۲) ۱۰۰
۳) ۱۲۰
۴) ۱۴۰

حل: گزینه ۳ پاسخ است.

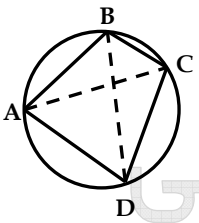
$$\left.\begin{array}{l} x+y = ۳۶۰^\circ \\ \frac{x-y}{۲} = ۶۰ \Rightarrow x-y = ۱۲۰ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲x = ۴۸۰ \Rightarrow x = ۲۴۰ \Rightarrow y = ۱۲۰$$

پس:

$$۲x-۳y = ۴۸۰-۳۶۰ = ۱۲۰$$

چند ضلعی محاطی:

اگر همه‌ی رأس‌های یک چندضلعی روی یک دایره قرار داشته باشند، چندضلعی را محاطی یا محاط در دایره می‌نامند.



شرط لازم و کافی برای آن که یک چهارضلعی محاطی باشد این است که مجموع زوایای مقابل آن ۱۸۰° باشد.

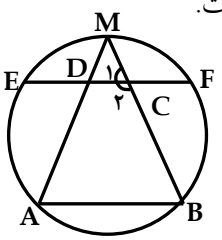
عمودمنصف‌های اضلاع چهارضلعی محاطی در یک نقطه همرسند که همان مرکز دایره محیطی آن است.

نکته: مربع، مستطیل و ذوزنقه متساوی الساقین محاطی‌اند.

مثال: از نقطه‌ی M وسط کمان EF از یک دایره دو وتر MA و MB را رسم می‌کنیم به گونه‌ای که وتر EF را در نقاط D,C قطع کند. چهارضلعی ABCD همواره:

۱) لوزی است. ۲) ذوزنقه است. ۳) محیطی است. ۴) محاطی است.

حل:



$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \frac{MF+FB}{۲} \\ \hat{C}_۱ = \frac{EM+FB}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A} = \hat{C}_۱$$

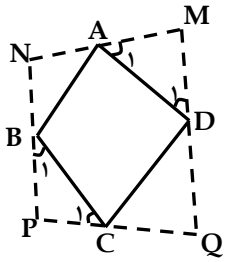
$$\hat{C}_۱ + \hat{C}_۲ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{C}_۲ = ۱۸۰^\circ$$

چهارضلعی محاطی است.

مثال: چهارضلعی حاصل از تقاطع نیمسازهای زوایای خارجی یک چهارضلعی محدب همواره .....

۱) یک ذوزنقه است.
۲) یک چهارضلعی محاطی است.
۳) یک چهارضلعی محیطی است.
۴) هیچکدام

حل:



$$\hat{M}+\hat{P}=۱۸۰^\circ-\hat{A}_۱-\hat{D}_۱+۱۸۰^\circ-\hat{B}_۱-\hat{C}_۱=۳۶۰-(\hat{A}_۱+\hat{B}_۱+\hat{C}_۱+\hat{D}_۱)$$

مجموع زوایای خارجی **n** ضلعی محدب ۳۶۰° است. چون این زوایا نیمساز زوایای خارجی هستند پس:

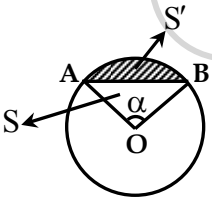
$$\hat{A}_۱+\hat{B}_۱+\hat{C}_۱+\hat{D}_۱=\frac{۳۶۰}{۲}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{M}+\hat{P}=۳۶۰-۱۸۰=۱۸۰^\circ$$

لذا چهارضلعی محاطی است.

محیط و مساحت دایره:

مساحت دایره‌ای به شعاع R برابر است با: $\pi R^۲$

مساحت قطاع دایره با زاویه α (بر حسب رادیان) به این ترتیب بدست می‌آید:

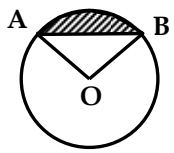


$$\left.\begin{matrix}۲\pi & \pi R^۲\\ \alpha & S\end{matrix}\right\}\Rightarrow S=\frac{\alpha R^۲}{۲}\qquad S'=\frac{۱}{۲}R^۲(\alpha-\sin\alpha)$$

محیط دایره‌ای به شعاع R برابر است با $۲\pi R$ همچنین طول قوس AB در قطاع فوق برابر است با $R\alpha$

نکته: بین همه‌ی شکل‌های مسطح با محیط ثابت، دایره بیش‌ترین مساحت را دارد. و بین همه شکل‌های با مساحت ثابت، دایره کمترین محیط را دارد.

مثال: در شکل مقابل O مرکز دایره و $A\hat{O}B=۹۰^\circ$ است. مساحت قسمت هاشور خورده چیست؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}R^۲$
۲) $\frac{۱}{۲}R^۲$
۳) $\frac{\pi R^۲}{۴}-\frac{R^۲}{۲}$
۴) $\frac{\pi R^۲}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}R^۲$

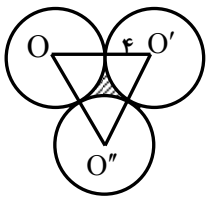
حل:

$$\alpha=\frac{\pi}{۲}^{rad}\Rightarrow S=\frac{R^۲}{۲}(\alpha-\sin\alpha)=\frac{R^۲}{۲}(\frac{\pi}{۲}-۱)=\frac{\pi R^۲}{۴}-\frac{R^۲}{۲}$$

مثال: مساحت بخش هاشور خورده کدام است؟ (دوایر متساوی می‌باشند)

۱) $۱۶\left(\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۳}\right)$
۲) $۱۶\left(\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۴}\right)$
۳) $۸\left(\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۴}\right)$
۴) $۸\left(۲\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۴}\right)$

حل:



مساحت یکی از دوایر $\times\frac{۱}{۶}\times۳-$ مساحت مثلث $\mathbf{oo'o''}=$ مساحت مطلوب

مثلث $\mathbf{oo'o''}$ متساوی الاضلاع است و طول ضلع آن $\mathbf{a=۲R=۸}$ می‌باشد.

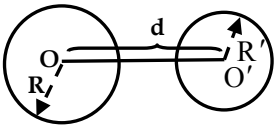
$$S=\frac{۶۴\times\sqrt{۳}}{۴}-\frac{۱}{۳}\times\pi\times۱۶=۱۶\left(\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۳}\right)$$

مؤسسه آموزشی فرهنگی

وضع دو دایره نسبت به هم:

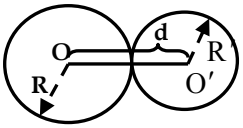
دو دایره می‌توانند متقاطع، مماس بیرون، متخارج، متداخل و مماس درون باشند. در حالت خاص، دو دایره متداخل می‌توانند هم‌مرکز باشند:

۱- دو دایره‌ی متخارج (بیرون هم):



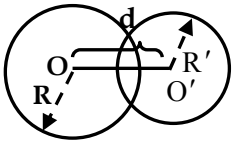
$d > R + R'$

۲- دو دایره‌ی مماس بیرون:



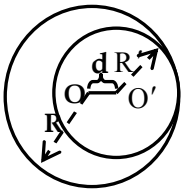
$d = R + R'$

۳- دو دایره‌ی متقاطع:



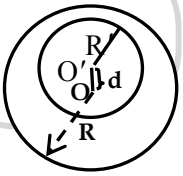
$|R - R'| < d < R + R'$

۴- دو دایره‌ی مماس درون:



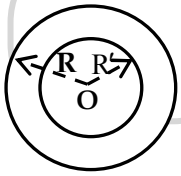
$d = |R - R'|$

۵- دو دایره‌ی متداخل (درون هم):



$d < |R - R'|$

۶- دو دایره‌ی هم مرکز (حالت خاص دو دایره متداخل):



$d = 0$

مثال: دو دایره $C(O,5)$ و $C(O',3)$ که در آن $OO' = 7$ می‌باشد، چه وضعی نسبت به هم دارند؟

۱) متداخلند ۲) متقاطعند ۳) متخارجند ۴) مماس درونی‌اند

حل:

$|R - R'| < OO' = d < R + R'$ ⇒ دو دایره متقاطعند

$2 < 7 < 8$

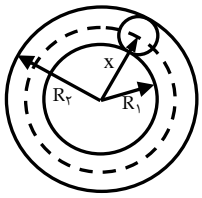
مثال: دو دایره‌ی به شعاع‌های ۱ و ۲ هم مرکزند. مکان هندسی مرکز دایره ای که بر آن‌ها مماس باشد، کدام است؟

۱) دو دایره به شعاع‌های $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{2}$ ۲) دو دایره به شعاع‌های $\frac{3}{2}$ و ۲

۳) دایره ای به شعاع $\frac{3}{2}$ ۴) دایره ای به شعاع $\frac{1}{2}$

حل: گزینه‌ی ۱ صحیح است.

در حالت اول دایره‌ی متحرک بر دایره‌ی بزرگتر مماس داخل و بر دایره‌ی کوچکتر مماس خارج است.

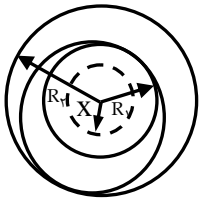


لذا شعاع دایره‌ی متحرک را یکبار بر اساس شعاع دایره‌ی بزرگتر و بار دیگر بر اساس شعاع دایره‌ی کوچکتر بازنویسی می‌کنیم و دو عبارت را برابر قرار می‌دهیم:

$$R_2 - X = X - R_1 \rightarrow X = \frac{R_1 + R_2}{2} = \frac{3}{2}$$

لذا چون فاصله از مرکز ثابت است، مکان مراکز دوایر متحرک دایره ایست به همان مرکز و شعاع X

در حالت دوم دایره‌ی متحرک بر هر دو دایره‌ی مماس داخل است.

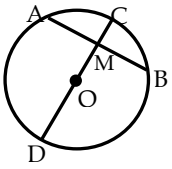


لذا شعاع دایره‌ی متحرک را یکبار بر اساس شعاع دایره‌ی بزرگتر و بار دیگر بر اساس شعاع دایره‌ی کوچکتر بازنویسی می‌کنیم و دو عبارت را برابر قرار می‌دهیم:

$$R_2 - X = X + R_1 \rightarrow X = \frac{R_2 - R_1}{2} = \frac{1}{2}$$

رابطه‌های طولی در دایره:

۱- وتر مینیمم: از نقطه مفروض M در داخل دایره بی‌شمار وتر می‌گذرد، که کوچک‌ترین آن‌ها بـر OM عمـود است و آن را وتر مینیمم نقطه M می‌نامند. و بزرگ‌ترین آن‌ها از O و M می‌گذرد که قطری از دایره است.

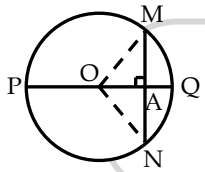


وتر ماکزیمم $= CD$ وتر مینیمم $= AB$

مثال: نقطه A به فاصله $\frac{R}{۲}$ از مرکز دایره $C(O,R)$ قرار دارد. نسبت اندازه‌ی وتر مینیمم به اندازه‌ی وتر مـاکزیمم گـذرا بـر نقطه A کدام است؟

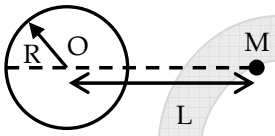
۱) ۱ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ٤) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

حل:



$$\left.\begin{array}{l} MN = ۲\left(\sqrt{R^۲ - \frac{R^۲}{۴}} = R\sqrt{۳}\right) \\ PQ = ۲R \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MN}{PQ} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۲- بیشترین و کمترین فاصله از دایره: بیشترین فاصله هر نقطه بیرون دایره از یک دایره برابر فاصله آن نقطه از سر قطری از دایره است که امتداد آن از نقطه مورد نظر در بیرون دایره می‌گذرد و کمترین فاصله مربوط به فاصله نقطه مورد نظر از سر دیگر قطر فوق می‌باشد.



فاصله نقطه مورد نظر از مرکز دایره $= L$

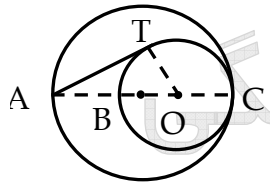
بیشترین فاصله نقطه‌ی M از نقاط دایره $= L + R$

کمترین فاصله نقطه‌ی M از نقاط دایره $= L - R$

مثال: دو دایره با شعاع‌های ۹ و ۱۲ واحد مماس درونی‌اند. اندازه‌ی بزرگترین قطعه‌ی مماسی که یـک سـر آن بـر روی دایـره‌ی بزرگ‌تر و سر دیگر آن (نقطه‌ی تماس) بر روی دایره‌ی کوچک‌تر باشد، کدامست؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ٤) ۸

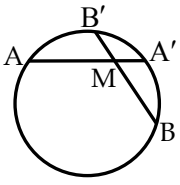
حل:



چون $AT^۲ = AO^۲ - R^۲$ پس هرچه **AO** بزرگتر باشد، **AT** بزرگتر است. ماکزیمم **AO** هنگـامی است که **A** روی امتداد قطر گذرنده از **O** قرار بگیرد:

$$AT^۲ = ۱۵^۲ - ۹^۲ = ۱۲^۲ \rightarrow AT = ۱۲$$

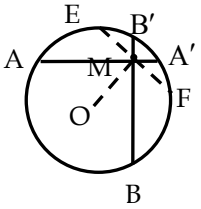
۳- روابط بین طول وترها: از نقطه‌ی M واقع در داخل دایره (C) دو وتـر دلخـواه AA' و BB' رسـم شده‌اند. در این‌صورت داریم:



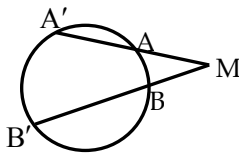
$$MA.MA' = MB.MB'$$

و اگر دو پاره‌خط AA' و BB' در نقطه‌ی M طوری یکدیگر را قطع کنند که: $MA.MA' = MB.MB'$ آنگاه چهـار نقطـه A و A' و B و B' روی یک دایره‌اند.

نکته: اگر ME و MF کوتاهترین وتر را بسازند:

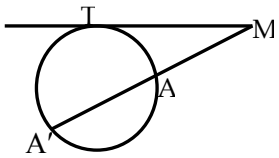


$$.ME^۲ = MF^۲ = MA.MA' = MB.MB'$$



مشابه همین رابطه اگر امتداد وترهای AA' و BB' از دایره (C) یکدیگر را در نقطه M خارج دایره قطع کنند، خواهیم داشت:

$$MA.MA' = MB.MB'$$



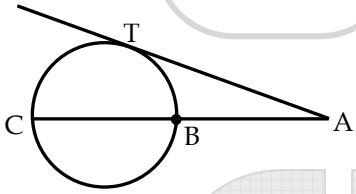
قضیه: اگر از یک نقطه یک مماس و یک قاطع نسبت به دایره رسم کنیم، قطعه‌ای از خط مماس محصور بین آن نقطه و نقطه تماس واسطه‌ی هندسی بین دو قطعه‌ی قاطع است و بالعکس.

$$MT^2 = MA.MA'$$

مثال: سه نقطه A, B, C مانند شکل مقابل روی یک خط قرار دارند. از B, C بی‌شمار دایره می‌گذرد. مکان هندسی نقطه‌ی تماس مماسهایی که از نقطه‌ی A بر آن‌ها می‌توان رسم کرد، کدام است؟

۱) خطی است عمود بر AB ۲) خطی است موازی با AB

۳) دایره است به مرکز A ۴) دایره است به مرکز B

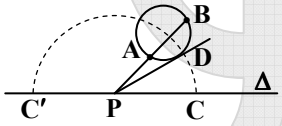


حل:

مقدار ثابت $= AT^2 = AB \times AC$

لذا مکان دایره‌ای است به مرکز A و شعاع AT.

مثال: نقطه‌ی P مرکز نیم‌دایره به قطر CC' است. شعاع PD مماس بر دایره‌ی مفروض رسم شده است. دایره‌ای که بر دو نقطه‌ی A و B می‌گذرد و مماس بر خط Δ است، در کدام نقطه بر خط Δ مماس می‌شود؟

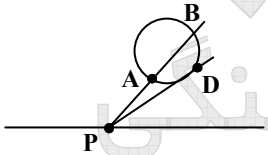


۱) C یا C' ۲) بین دو نقطه‌ی C و C'

۳) خارج پاره‌خط $C'C$ ۴) نشدنی

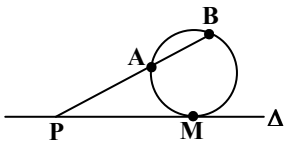
حل: گزینه ۱ پاسخ است.

اولین موضوعی که در این سؤال جلب توجه می‌کند این است که:



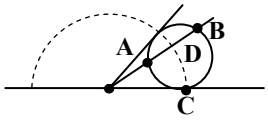
$$PD^2 = PA.PB$$

حال اگر دایره گذرنده از A و B بر خط Δ مماس شود، خواهیم داشت:



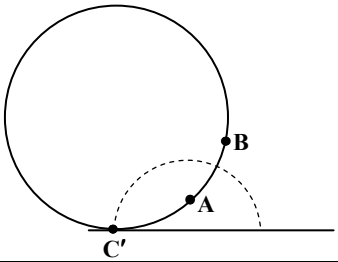
$$PM^2 = PA.PB$$

با مقایسه ۲ رابطه فوق خواهیم داشت:

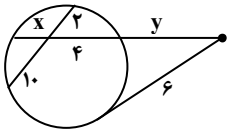


$$PM^2 = PD^2$$

یعنی طول PM با طول PD برابر است اما برای PM ۲ جواب وجود دارد و چون PD شعاع دایره خط‌چین می‌باشد پس ۲ جواب M نقاط C و C' می‌باشد.



مثال: در شکل مقابل $2x-y$ کدام است؟



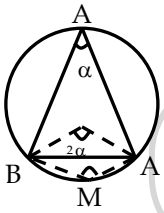
حل:

با توجه به روابط طولی در دایره داریم:

$$\left.\begin{array}{l} ۶^۲ = y\times(y+۴+x) \\ ۲\times۱۰ = ۴\times x \rightarrow x=۵ \end{array}\right\} \rightarrow y\times(y+۹)=۳۶=۳\times۱۲ \Rightarrow y=۳ \Rightarrow ۲x-y=۷$$

کمان در خور یک زاویه:

مکان هندسی رأس زاویه‌ای برابر α که ضلع‌هایش از دو نقطه ثابت می‌گذرند، کمان‌هایی از دو دایره‌ی مساوی است که از آن دو نقطه‌ی ثابت می‌گذرند و زاویه‌ی مرکزی رو به رو به وتر مشترک آن‌ها برابر ۲α است. این کمان، کمان در خور زاویه‌ی α نامیده می‌شود.



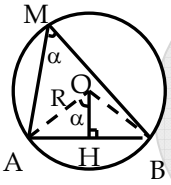
نکته ۱: نقاط A و B جزء کمان در خور زاویه‌ی α نیستند.

نکته ۲: کمان در خور زاویه‌ی ۹۰° رو به رو به پاره خط AB، دایره‌ای به قطر AB است.

نکته ۳: کمان $\overset{\frown}{AMB}$ و کمان نظیر آن از دایره دوم، کمان در خور نظیر پاره‌خط AB و زاویه $۱۸۰-\alpha$ می‌باشد.

نکته ٤: شعاع دایره‌ای که کمان در خور زاویه‌ی α رو به پاره خط $AB=a$ بخشی از آن است برابر است با:

$$R=\frac{a}{۲\sin\alpha}$$

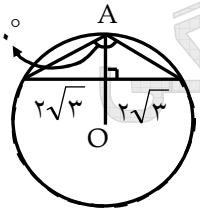


فاصله مرکز دایره از وتر AB برابر $OH=\frac{a}{۲|\tan\alpha|}$ می‌باشد.

مثال: مثلثی با معلومات $\hat{A}=۱۲۰^\circ, a=٤\sqrt{۳}$ و h_a قابل رسم است. h_a کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ٤) ۳

حل:



مکان هندسی رأس A، کمان در خور زاویه‌ی ۱۲۰° رو به پاره‌خط $BC=a$ است. ضمن تغییر مکان A روی کمان، ماکزیمم مقدار ارتفاع، مربوط به حالتی است که A روی انتهای شعاع عمود بر پاره‌خط BC قرار بگیرد. (عمود منصف BC) در این حالت $h_a=۲\sqrt{۳}\cot ۶۰^\circ=۲\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}=۲$. لذا حدود تغییر h_a، $۰<h_a\le ۲$ است. لذا h_a برابر ۳ نمی‌تواند باشد.

ترسیم‌های هندسی در دایره:

خط‌های قاطع و مماس نسبت به دایره:

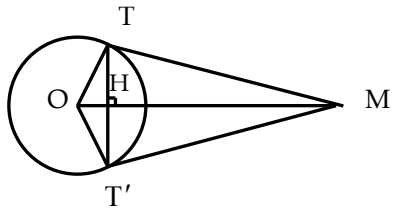
خط راستی که دایره را در دو نقطه قطع کند، قاطع نسبت به دایره یا به طور خلاصه قاطع نامیده می‌شود.

خط L که دایره را فقط و فقط در نقطه‌ی A روی دایره قطع می کند، خط مماس بر دایره در نقطه‌ی A می‌نامیم. نقطه‌ی A را نقطه‌ی تماس می‌نامیم.

نکته: از هر نقطه خارج یک دایره می‌توان دو خط مماس بر آن دایره رسم نمود.

قضیه: اگر دو خط MT و MT' بر دایره $C(O,R)$ مماس باشند، داریم:

۱- $\hat{OTM} = ۹۰^\circ$ (شعاع دایره در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است.)



۲- $MT = MT'$

۳- OM نیمساز $\hat{TMT'}$ و $\hat{TOT'}$ است.

۴- OH عمودمنصف TT' است.

۵- $OH.OM = R^۲$

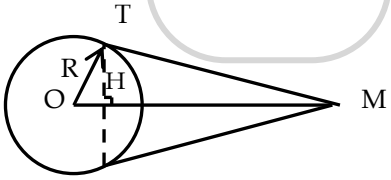
۶- $TT'^۲ = ۴OH.HM$

۷- $TT'.OM = ۲R.MT$

مثال: از نقطه‌ی M خارج دایره‌ی $C(O,R)$ دو مماس بر دایره رسم شده است. اگر پاره‌خطی که از دو نقطه‌ی تماس می‌گذرد، OM را به دو قسمت به طول‌های ۲ و ۶ تقسیم کند، طول مماس چقدر است؟

۱) ۴ ۲) $\sqrt{۴۸}$ ۳) ۸ ۴) گزینه ۱ یا ۲ صحیح است.

حل:

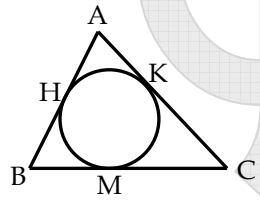


$$OM = OH + HM = ۶ + ۲ = ۸$$
$$R^۲ = OH.OM = ۸ \times ۲ = ۱۶ \Rightarrow R = ۴$$
$$MT = \sqrt{OM^۲ - R^۲} = \sqrt{۶۴ - ۱۶} = \sqrt{۴۸}$$

تا اینجا فرض کرده‌ایم $MH > OH$ ولی حالتی نیز وجود دارد که $HM < OH$ که در این حالت:

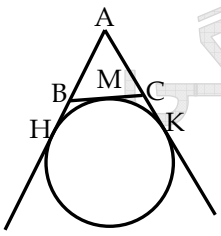
$$R'^۲ = OH'.OM = ۶ \times ۸ = ۴۸ \Rightarrow R' = \sqrt{۴۸}$$
$$MT^۲ = OM^۲ - R'^۲ = \sqrt{۶۴ - ۴۸} = ۴$$

نکته: پاره‌خط‌هایی که دایره‌ی محاطی داخلی مثلث روی اضلاع آن جدا می‌کند، برحسب طول اضلاع مثلث چنین است:



$$AH = AK = p - a$$
$$BH = BM = p - b$$
$$CM = CK = p - c$$

پاره‌خط‌هایی که دایره‌ی محاطی خارجی رأس A روی ضلع a و روی امتداد دو ضلع c, b جدا می‌کند بر حسب طول اضلاع مثلث چنین است:



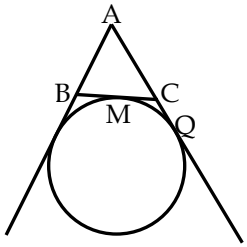
$$AH = AK = p$$
$$BH = BM = p - c$$
$$CM = CK = p - b$$

مثال: در شکل مقابل با حرکت نقطه‌ی M روی محیط دایره و بین نقاط Q,P مساحت و محیط مثلث چگونه‌اند؟

۱) مساحت ثابت و محیط ثابت ۲) مساحت ثابت و محیط متغیر

۳) مساحت متغیر و محیط ثابت ۴) مساحت متغیر و محیط متغیر

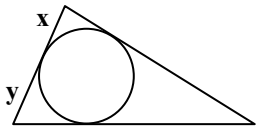
حل:



$$p = AP = AQ \Rightarrow ۲p = ۲AP = ۲AQ$$

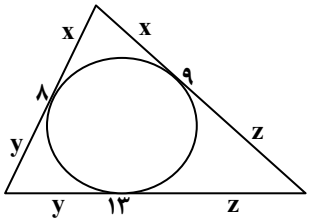
با حرکت **M** روی محیط دایره طول مماس‌های **AP** و یا **AQ** ثابت می‌ماند لذا محیط مثلث ثابت است. اما ملاحظه می‌کنیم با نزدیک شدن **M** به نقاط **Q,P** مساحت مثلث به صفر میل می‌کند، لذا مساحت متغیر است.

مثال: دایره‌ی محاطی داخلی یک مثلث به طول اضلاع ۱۳ و ۹ و ۸، در نقطه‌ی تماس کوچک‌ترین ضلع را به ۲ قطعه تقسیم می‌کند. نسبت آن دو قطعه کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

حل: گزینه ۱ پاسخ است.



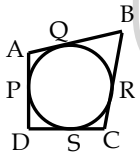
$$\left.\begin{matrix} x+y=۸ \\ x+z=۹ \\ y+z=۱۳ \end{matrix}\right\} \oplus \Rightarrow ۲(x+y+z)=۳۰ \Rightarrow x+y+z=۱۵$$

بنابراین $x=۲$، $y=۶$ و $z=۷$ می‌باشد، در نتیجه: $\frac{x}{y}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$

چند ضلعی محیطی:

هرگاه همه‌ی ضلع‌های یک چندضلعی بر یک دایره مماس باشند، چند ضلعی را محیطی یا محیط بر دایره می‌نامند.

شرط لازم و کافی برای این که یک چهارضلعی محیطی باشد آن است که مجموع دو ضلع مقابل آن مساوی باشد با مجموع دو ضلع دیگر مقابل به هم:



$$AB+CD=BC+AD$$

نیمسازهای داخلی چهارضلعی محیطی در یک نقطه همرسند که همان مرکز دایره‌ی محاطی چهارضلعی است.

مساحت هر چهار ضلعی محیطی با حاصل‌ضرب محیط آن در نصف شعاع دایره‌ی محاطی برابر است.

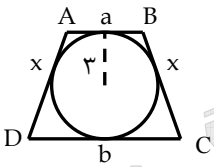
$$S=\frac{R}{۲}\times ۲p$$

نکته: لوزی، مربع و مثلث محیطی‌اند و ذوزنقه متساوی‌الساقین ممکن است محیطی باشد.

مثال: یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین بر دایره‌ای به شعاع $R=۳$ محیط است. اگر مساحت ذوزنقه ۴۵ واحد مربع باشد، طول ساق آن کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۷.۵ ۳) ۸ ۴) ۸.۵

حل:



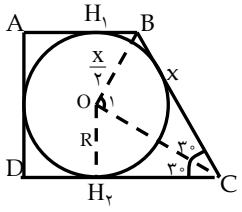
$$\frac{(a+b)}{۲}\times ۶=۴۵ \Rightarrow a+b=۱۵$$

$$a+b=x+x=۲x=۱۵ \Rightarrow x=۷.۵$$

مثال: دایره‌ی $C(O,۱/۵)$ در یک ذوزنقه‌ی قائم محاط است. اگر یک زاویه‌ی ذوزنقه ۶۰° باشد، محیط آن برابر کدام است؟

۱) $۲\left(۳+\sqrt{۳}\right)$ ۲) $۲\left(۳+۲\sqrt{۳}\right)$ ۳) $۳\left(۳+\sqrt{۳}\right)$ ۴) $\left(۳+۲\sqrt{۳}\right)$

حل:



$$x^۲=\frac{x^۲}{۴}+۴R^۲ \Rightarrow \frac{۳}{۴}x^۲=۹ \Rightarrow x=۲\sqrt{۳}$$

$$۲p=AB+BC+DC+AD=AH_۱+۲\left(\overbrace{BH_۱+CH_۲}^{x}\right)+DH_۲+AD=۲(AD+x)=۲\left(۳+۲\sqrt{۳}\right)$$

مثال: سه نیمساز داخلی یک چهارضلعی از یک نقطه می‌گذرند. اگر اندازه‌ی سه ضلع متوالی آن چهارضلعی به ترتیب ۷۲ و ۱۰۷ و ۹۱ باشند، اندازه‌ی ضلع چهارم آن کدام است؟

۱) ۵۶ ۲) ۸۸ ۳) ۹۰ ۴) ۱۲۶

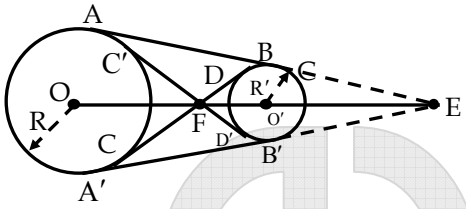
حل:

همانطور که گفته شد، یک چهارضلعی را محیطی گویند هرگاه اضلاع آن بر دایره‌ای مماس باشند یا به عبارت دیگر نقطه ای درون آن یافت شود که از چهار ضلع به یک فاصله باشد. وقتی نیمساز سه زاویه از یک چهار ضلعی در نقطه ای همرس باشند نیمساز زاویه‌ی چهارم نیز از آن نقطه عبور خواهد کرد و در نتیجه آن نقطه از تمامی اضلاع به یک فاصله خواهد بود. پس می‌تواند مرکز دایره‌ی محاطی آن چهارضلعی باشد و چهارضلعی مذکور محیطی باشد پس داریم: $a+c=b+d \Rightarrow ۱۶۳=۱۰۷+d \Rightarrow d=۵۶$

مماس مشترک دو دایره:

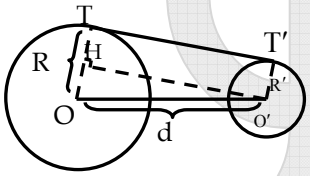
مماس مشترک دو دایره خطی است که بر هر دو دایره مماس باشد. اگر دو دایره در یک طرف خط مماس باشند، این خط مماس مشترک خارجی و اگر دو دایره در دو طرف خط مماس باشند این خط مماس مشترک داخلی دو دایره نامیده می‌شود.

دو دایره‌ی متخارج دارای دو مماس مشترک خارجی $A'B'$ و AB و دو مماس مشترک داخلی CD و $C'D'$ هستند. نقطه‌ی تلاقی مماس مشترک خارجی و نقطه تلاقی مماس مشترک داخلی روی خط المرکزین و امتداد آن هستند. و خط المرکزین را به یک نسبت تقسیم می‌کنند:



$$\frac{FO'}{FO}=\frac{EO'}{EO}=\frac{R'}{R}$$

اندازه‌ی مماس مشترک خارجی دو دایره:

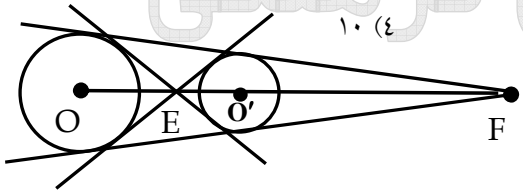


برای بدست آوردن اندازه‌ی مماس مشترک خارجی دو دایره به طریق زیر عمل می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned}OO'^{۲}&=OH^{۲}+O'H^{۲}\\ d^{۲}&=(R-R')^{۲}+TT'^{۲}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \quad TT'=\sqrt{d^{۲}-(R-R')^{۲}}$$

مثال: دو دایره C و C' به مرکزهای O و O' به شعاع‌های ۳ و ۵ به فاصله‌ی $OO'=۱۶$ مفروض است، فاصله محل تلاقی مماس مشترک‌های داخلی و خارجی کدامست؟

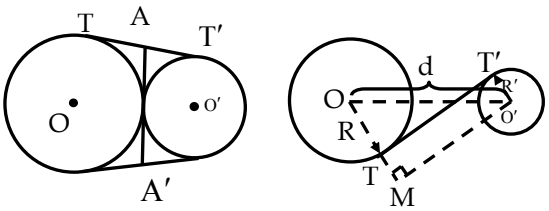
۱) ۴۰ ۲) ۳۰ ۳) ۲۰ ۴) ۱۰



حل:

$$\left.\begin{aligned}\frac{EO}{EO'}=\frac{R}{R'}&\rightarrow\frac{۱۶-EO'}{EO'}=\frac{۵}{۳}\rightarrow EO'=۶\\ \frac{FO'}{FO}=\frac{R'}{R}&\rightarrow\frac{FO'}{FO'+۱۶}=\frac{۳}{۵}\rightarrow FO'=۲۴\end{aligned}\right\}\Rightarrow EF=EO'+O'F=۶+۲۴=۳۰$$

اندازه‌ی مماس مشترک داخلی دو دایره:



برای بدست آوردن مماس مشترک داخلی دو دایره به طریق زیر عمل می‌کنیم:

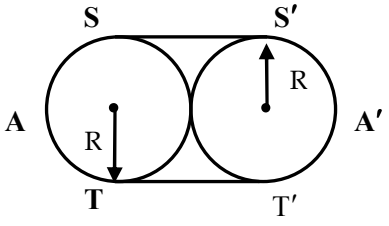
$$\left.\begin{aligned}TT'^{۲}+OM^{۲}&=OO'^{۲}\\ TT'^{۲}+(R+R')^{۲}&=d^{۲}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \quad TT'=\sqrt{d^{۲}-(R+R')^{۲}}$$

نکته: در دو دایره‌ی مماس بیرون داریم: $TT'=۲\sqrt{RR'}=AA'$

مثال: در شکل مقابل، شعاع دو دایره برابر R می‌باشد. طول نخی که دور آن‌ها بسته شده است، چقدر است؟

۱) $۲R+\pi R$ ۲) $۲(R+\pi R)$ ۳) $۴R+۲\pi R$ ۴) $۴\pi R$

حل:



نخ را به چهار قسمت تقسیم می‌کنیم: $TAS, T'A'S', SS', TT'$. داریم:

$TAS = T'A'S'$ مربع است $TT'S'S \Rightarrow TT' = SS'$

طول کمان TAS برابر با نصف دایره است. یعنی:

$$\left|\widehat{TAS}\right| = \frac{۲\pi R}{۲} = \pi R$$

و TT' هم برابر با طول خط المرکزین دو دایره یعنی $۲R$ است. پس:

$$\text{طول نخ} = (\pi R \times ۲) + (۲R \times ۲) = ۴R + ۲\pi R$$

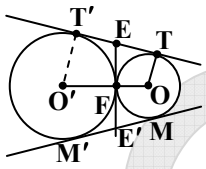
نکته: اگر زاویه‌ی بین مماسهای مشترک داخلی و یا خارجی α باشد، این مماسها توسط فرمول‌های زیر قابل محاسبه‌اند:

$$AB = A'B' = |R - R'| \cot\frac{\alpha}{۲}$$

$$CD = C'D' = (R + R') \cot\frac{\alpha}{۲}$$

مثال: دو دایره به شعاع‌های ۹ و ٤ مماس بیرون هستند. اگر TT' و EE' و MM' مماس مشترک‌های این دوایر هستند. طول EE' چقدر است؟

حل:



$$\left.\begin{array}{l} EF = T'E = ET \rightarrow EF = \frac{TT'}{۲} \\ FE' = M'E' = E'M \rightarrow E'F = \frac{MM'}{۲} \end{array}\right\} \rightarrow EF = E'F = \frac{TT'}{۲}$$

$$TT' = MM' \rightarrow EE' = TT'$$

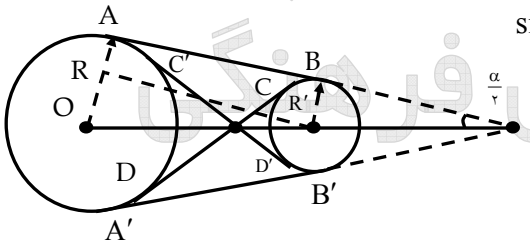
پس:

$$EE' = TT' = \sqrt{(R+R')^۲ - (R-R')^۲} = \sqrt{۴RR'} = ۲\sqrt{RR'} = ۲\sqrt{۴\times۹} = ۱۲$$

نکته: اگر α زاویه‌ی بین دو مماس مشترک خارجی باشد آنگاه: $\sin\frac{\alpha}{۲} = \frac{R-R'}{d}$

و در دو دایره مماس خارج: $\sin\frac{\alpha}{۲} = \frac{R-R'}{R+R'}$

و اگر α زاویه‌ی بین دو مماس مشترک داخلی باشد: $\sin\frac{\alpha}{۲} = \frac{R+R'}{d}$



مثال: دو دایره به شعاعهای $۲R, R$ مماس خارجند. زاویه‌ی بین خط‌المرکزین و مماس مشترک خارجی آنها برابر کدام است؟

حل:

$$\left.\begin{array}{l} d = ۳R \\ ۲R - R = R \end{array}\right\} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{R}{۳R} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \alpha = \text{Arcsin}\frac{۱}{۳}$$

مثال: اندازه زاویه‌ی بین دو مماس مشترک داخلی دوایر $OO' = ٦, C'(O', \sqrt{۲}), C(O, ۲\sqrt{۲})$ کدام است؟

حل:

$$\frac{\alpha}{۲} = \text{Arcsin}\frac{R+R'}{d} \Rightarrow \alpha = ۲\text{Arcsin}\frac{R+R'}{d} = ۲\text{Arcsin}\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۹۰^\circ$$